UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA TOR VERGATA

ESERCITAZIONE CORSO DI ANALISI MATEMATICA I

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA

ESERCITATORE: DANIELE PASQUAZI

pasquazi@mat.uniroma2.it

18 dicembre 2024

1. Calcolare i seguenti integrali indefiniti.

1.a	$e^x\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)$	1.e	$e^{2\sqrt{t}}$
1.b	$(x-4)^2\sin x$	1.f	$\frac{\log(logx)}{x}$
1.c	$\frac{1}{\sqrt[3]{2x+1}}$	1.g	$\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$
1.d	$\cos^4 x$	1.h	$x\sqrt{1+4x^2}$
1.i	$\frac{2x+1}{x(x^2+1)}$	1.l	$\frac{\sqrt{x-1}+1}{x+2\sqrt{x-1}+2}$

2. Calcolare i seguenti integrali definiti.

2.a	$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\lvert\sin x\rvert}{\cos x}dx$	2.c	$\int_0^{2\pi}\lvert\sin x\rvert^3\,dx$
2.b	$\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos^3 x dx$	2.d	$\int_0^{\pi/3}\frac{1}{1-sinx}dx$

3. Determinare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni e rappresentarle nel piano di Gauss.

3.a	$z^2+2iz+3=0$	3.e	$\left(\frac{2z+1}{2z-1}\right)^4=1$
3.b	$z^3+1=0$	3.f	$z^5-1=0$
3.c	$z\cdot\bar{z}=4$	3.g	$\bar{z}^3=-\frac{1}{\lvert z\rvert}$
3.d	$\lvert z\rvert=\lvert z-1\rvert$	3.h	$z^2-\lvert\bar{z}\rvert^2=iRe(iz)$

Soluzioni

(1.a) $\frac{x^2e^x}{2}+C$; (1.b) $-(x-4)^2\cos(x)+(2x-8)\sin(x)+2\cos(x)+C$; (1.c) $\frac{3(2x+1)^{\frac{2}{3}}}{4}+C$; (1.d) $\frac{\sin(2x)}{4}+\frac{\sin(4x)}{32}+\frac{3x}{8}+C$; (1.e) $\frac{e^{2\sqrt{t}}}{2}(2\sqrt{t}-1)+c$; (1.f) $logx\cdot(loglog(x)-1)+c$; (1.g) $x-2\sqrt{x}+2log(1+\sqrt{x})+c$; (1.h) $\frac{(4x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{12}+C$; (1.i) $log\lvert x\rvert-\frac{1}{2}\log(x^2+1)+2arctgx+c$; (1.l) (1.e) $2\sqrt{x-1}-\log(x+2\sqrt{x-1}+2)-2\sqrt{2}\cdot\text{arctg}\frac{(\sqrt{x-1})+1}{\sqrt{2}}+c$

$(2.a)$ $log2$; (2.b) $-\frac{4}{3}$.

$(2.c)$ $\int_0^{2\pi} |\sin x|^3\, dx = 2\int_0^{\pi} sin^3 x\, dx = 2\int_0^{\pi} sinx(1-\cos^2 x)\, dx = 2\int_0^{\pi} sinx\, dx - 2\int_0^{\pi} sinxcos^2x\, dx = 2(-cos\pi + cos0) + \frac{2}{3}(\cos^3\pi - \cos^3 0) = \frac{8}{3}$. $(2.d)$ $\int_0^{\pi/3} \frac{1}{1-\mathrm{sinx}}\mathrm{dx} = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{1-\mathrm{sinx}} \cdot \frac{1+sinx}{1+sinx} dx = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{dx} + \int_0^{\pi/3} \frac{sinx}{cos^2 x}\mathrm{dx} = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \mathrm{tg}(0) + \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} - \frac{1}{\cos(0)} = 1 + \sqrt{3}$.

$(3.e)$

$$\left(\frac{2z+1}{2z-1}\right)^4 = 1$$

Sia $u = \frac{2z+1}{2z-1}$

$$(u)^4 = e^{i2\pi}$$

Le soluzioni sono

$u_k = e^{\frac{ik\pi}{2}}$ con $k = 0, 1, 2, 3$.

Quindi $u_0 = 1,\ u_1 = e^{\frac{i\pi}{2}} = i, u_2 = e^{i\pi} = -1, u_3 = e^{\frac{i3\pi}{2}} = -i$

Tornando a $\frac{2z+1}{2z-1} = u_k$ cioè $z = \frac{u_k+1}{2(u_k-1)} = \begin{cases} se\ u_k = u_0 = 1 \text{ è } impossibile \\ se\ u_k = u_1 = i\ allora\ z = -\frac{i}{2} \\ se\ u_k = u_2 = -1\ allora\ z = 0 \\ se\ u_k = u_3 = -i\ allora\ z = \frac{i}{2} \end{cases}$

$(3.g)$

Sia $z = re^{i\theta}$ con $r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi), \bar{z} = re^{-i\theta},\ \bar{z}^3 = r^3 e^{-3i\theta} = r^3(cos3\theta$ - i·sin$3\theta)$

$\bar{z}^3 = -\frac{1}{|z|}$ equivale a $\begin{cases} r^3 cos3\theta = -\frac{1}{r} \\ sin3\theta = 0 \end{cases}$ che ammette soluzione $\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{2k+1}{3}\pi \end{cases}$.

Pertanto: $z = e^{i(\frac{2k+1}{3})\pi}$ con $k = 0, 1, 2$.